

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2015

Mecânica Quântica

13/08/2015 - 9h às 12h

(Escolha três dentre as quatro questões.)

QUESTÃO 1: Fundamentos da Mecânica Quântica

A função de onda normalizada de uma partícula com movimento unidimensional tem a forma

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\Delta^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\Delta^2}\right),$$

onde Δ é o desvio padrão.

a) (40%) Determine a probabilidade de que a partícula tenha momentum linear entre p e $p + dp$ (seu resultado pode ser escrito em termos de uma integral). Calcule o produto das incertezas na posição, Δx , e momentum, Δp . Analise seu resultado considerando o Princípio da Incerteza.

b) (30%) Determine a incerteza no momentum da função de onda, Δp , representada por:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}, \quad |x| < a$$

$$\phi(x) = 0, \quad |x| > a$$

Discuta se a expressão da função de onda fornecida é aceitável fisicamente.

c) (30%) A expressão formal para o fluxo de partículas de massa m no estado $\phi(x)$ é dada por $F = \hbar/(2mi)(\phi^* d\phi/dx - \phi d\phi^*/dx)$. Mostre que para um feixe de partículas livres com velocidade $v = p/m$, em movimento unidimensional, a expressão acima corresponde a $F = v \times (\text{densidade de partículas})$. Mostre também que a velocidade de fase da partícula é $v/2$.

QUESTÃO 2: Momento Angular

Considere um sistema composto de duas partículas de spin $1/2$, \vec{S}_1 e \vec{S}_2 , cujo Hamiltoniano é dado por

$$H = \left(\frac{4\alpha}{\hbar^2} \right) \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2,$$

onde α é uma constante.

a) (40%) Escreva os autoestados do Hamiltoniano de interação em termos da base produto $\{|m_1, m_2\rangle\}$, onde $|m_1 = \pm\rangle$ e $|m_2 = \pm\rangle$ são autoestados dos operadores \hat{S}_{1z} e \hat{S}_{2z} , respectivamente. Para esse cálculo, utilize a relação matemática do operador de abaixamento \hat{J}_- fornecida abaixo. Determine as possíveis energias do sistema interagente.

b) (40%) Suponha que para $t = 0$ o sistema se encontra no estado $|-+\rangle$. Determine o estado das partículas em um tempo $t > 0$ em função dos estados da base produto.

c) (20%) Considere que uma medida de \vec{S}_1 seja feita ao longo da direção x no instante t e que o resultado obtido tenha sido $+\hbar/2$. Obtenha a probabilidade de o momento angular S_x da partícula 2 possuir valor $-\hbar/2$ imediatamente após a medição?

Dados:

$$\hat{J}_-|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle,$$

$$\hat{J}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle,$$

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle),$$

onde $|\pm\rangle_x$ são autoestados do operador \hat{S}_x .

QUESTÃO 3: Teoria de Perturbação

Considere uma partícula carregada em um potencial harmônico unidimensional $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. No instante $t = 0$, um campo elétrico não uniforme é aplicado de modo a perturbar o sistema com uma energia potencial dada por

$$U(x, t) = Ax^2 \exp(-t/\tau),$$

onde A é uma constante.

a) (30%) Considere o sistema no instante inicial $t = 0$, onde $U(x, 0) = U(x) = Ax^2$, e calcule a correção de primeira ordem nos níveis de energia. O que se pode afirmar sobre as correções de ordem superior?

b) (40%) Determine a evolução temporal da probabilidade de, numa medição, o sistema ter sofrido uma transição de um estado inicial $|i\rangle$ para um estado final $|f\rangle$, onde $|i\rangle$ e $|f\rangle$ correspondem aos autoestados do oscilador harmônico não perturbado com energias E_i e E_f , respectivamente.

c) (30%) Considere que a partícula esteja inicialmente no estado $|i = 3\rangle$, que corresponde ao estado do oscilador com energia $E = 7\hbar\omega/2$, determine as possíveis transições devido à perturbação $U(x, t)$. Obtenha a probabilidade de se observar uma transição em uma medida realizada em $t \gg \tau$ e determine a transição mais provável nesse instante.

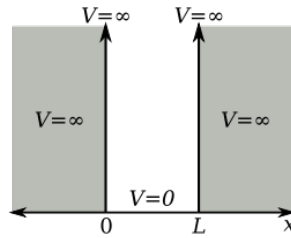
Dados:

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}),$$

onde \hat{a}^\dagger e \hat{a} são os operadores de criação e destruição do oscilador harmônico, respectivamente.

QUESTÃO 4: Partículas Idênticas

Duas partículas não interagentes estão em um poço unidimensional infinito de comprimento L ilustrado abaixo:



- a) (20%) Calcule os valores dos quatro níveis de energia mais baixos do sistema.
- b) (40%) Determine as degenerescências destas energias se as duas partículas são idênticas e possuem spin $1/2$.

Considere que as mesmas partículas foram colocadas num potencial de um oscilador harmônico tridimensional e isotrópico.

- c) (40%) Determine as degenerescências dos três níveis de energia mais baixos.